DEUG S2, 2003-2004
Electrostatique

Electrostatique

Préambule : Valeurs numériques

Charge élémentaire $q_e = 1,602.10^{-19}$ C
Permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8,854.10^{-12}$ F.m^{-1}
Masse de l'électron $m_e = 9,109.10^{-31}$ kg
Masse du proton $m_p = 1,673.10^{-27}$ kg
Constante gravitationelle $G = 6,67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}
Accélération de la pesanteur $g = 9.81$ m.s^{-2}
Masse de la Terre $M_T = 6.10^{24}$ kg
Masse du Soleil $M_\odot = 2.10^{30}$ kg
Rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène $a_0 = 0,529.10^{-10}$ m
Distance Terre-Soleil $d = 150.10^9$ m

Exercice 1: Forces fondamentales

(a) Le noyau de l'atome d'hélium (^{4}He) est composé de deux protons de masse $m_p = 1,673.10^{-27}\ kg$ et de charge $+e = 1,602.10^{-19}\ C$ et de deux neutrons de masse très voisine mais de charge nulle. Le noyau atomique a une dimension de l'ordre de $10^{-15}\ m$.

- Par un simple calcul d'ordre de grandeur, montrer que la force gravitationnelle ne peut pas suffire à compenser la répulsion des protons et donc à assurer la cohésion du noyau.

(b) Oscilloscope : On applique une tension de 10 V entre les plaques dun oscilloscope. Sachant que ces plaques sont séparées de 1 cm, quel est le champ électrique régnant dans le tube ? Comment se comparent les forces électrostatiques et gravitationnelles agissant sur un électron passant entre les plaques ?

(c) Neutralité des objets macroscopiques : Deux corps de masses égales $M = 50$ kg sont distantes de $d = 1$ m. Calculer la force qui s'exerce entre ces deux corps en supposant que chaque corps comporte autant de protons que de neutrons mais seulement 99 électrons pour 100 protons. Comparer cette force au poids de chaque corps, que peut-on en conclure ?

Exercice 2: Ordres de grandeur (mars 2002)

Calculer la force électrique (en N) s'exerçant entre l'électron et le proton dans l'atome d'hydrogène. Calculer ensuite la force gravitationnelle entre la Terre et le Soleil. Quelles sont les analogies et les différences entre ces deux forces ?

Exercice 3: Champ et forces électrostatiques

(a) On considère deux points $N(0, -d)$ et $P(0, d)$ portant respectivement une charge $-q_e$ et $+q_e$, où q_e est la charge élémentaire. Calculer la valeur du champ électrostatique en $A(2d, 2d)$. Faire une représentation graphique. Application numérique : $d = 0,1$ nm

(b) Deux boules de sureau pesant chacune 2 mg sont suspendues à un même point par un fil de longueur $l = 5$ cm. La premire porte une charge q et la seconde $2q$. Sachant que l'angle 2θ entre les fils vaut 120°, calculer la valeur de q.

Exercice 4: Trois charges

On considère trois charges q situées sur les sommets d'un triangle équilatéral de côté a.

- Calculer le champ électrique créé par les trois charges au centre de gravité du triangle.
- Quelle est la direction du champ sur les médianes du triangle ?
- Quel est le potentiel au centre du triangle ? aux milieux des côtés du triangle ? En déduire que sur chaque médiane, le champ s'annule deux fois.

Exercice 5: Equilibre de deux charges

Deux charges de valeurs q et $2q$ sont séparées d'une distance d. Une troisième charge q' est libre de se mouvoir sur l'axe des deux charges. En écrivant qu'à l'équilibre la somme des forces est nulle sur q', déterminer sa position. Même question en écrivant l'énergie créée par les deux charges. On étudiera la stabilité de l'équilibre pour les cas où q et q' sont de même signe ou non.

Exercice 6: Equilibre d'une charge (mars 2002)

On considère un système Ω constitué de deux charges q placée à l'origine O et αq (pour toutes les applications numériques, $\alpha = 1/2$) placée en O' à la distance d de O sur l'axe Ox. On considère de plus une charge Q susceptible de se déplacer sur l'axe Ox, à la distance x de O. Dans tout l'exercice, q et Q sont choisis positifs.

- *Si $x > d$, exprimer l'énergie potentielle $U_{\Omega \to Q}(x)$ de la charge Q en présence du système Ω. En déduire la force (module et orientation) $\vec{F}_{\Omega \to Q}$. Existe-t-il une position d'équilibre x_0 (à déterminer) de Q telle que la force s'annule ?*
- *Mêmes questions pour $0 < x < d$. Existe-t-il une position d'équilibre x'_0 ?*
- *En examinant la variation de la force (sans calcul) pour un déplacement infinitésimal autour des positions d'équilibre, déterminer la stabilité des positions d'équilibre x_0 et x'_0.*
- *Représenter l'allure de la courbe $U_{\Omega \to Q}(x)$.*
- *Déterminer l'énergie de constitution $U_{\Omega \cup Q}$ du système complet dans sa configuration d'équilibre stable.*

Exercice 7: Cristal ionique

Un cristal ionique est formé d'un empilement périodique d'ions de charges opposées. La stabilité du cristal est assurée par l'équilibre entre la force électrostatique entre ions et une force répulsive à courte portée (répulsion des nuages électroniques des ions). On se limitera dans un premier temps à un modèle simplifié de cristal ionique formé d'une chaîne unidimensionnelle infinie d'ions alternativement chargés $+|e|$ et $-|e|$ et séparés d'une distance constante a. On suppose que la force répulsive s'exerçant entre deux ions séparés d'une distance r est de la forme :

$$F_r = \frac{C_0}{r^3}$$

- Rappeler l'expression du potentiel électrostatique créé par une charge, puis de la force coulombienne entre deux charges et de l'énergie potentielle électrostatique entre ces deux charges.
- Écrire la force puis l'énergie potentielle électrostatique créée par le reste du cristal sur d'un ion donné.
- Déterminer l'énergie potentielle associée à la répulsion entre deux ions.
- Écrire l'énergie potentielle d'un ion puis son énergie totale.
- On se place à température nulle et on suppose que les ions sont alors immobiles. On peut montrer que le système adopte la valeur du paramètre de maille a qui rend l'énergie minimale. Représenter graphiquement l'allure de l'énergie en fonction de a et calculer la position de son minimum. Interpréter l'effet de la température et la fusion du cristal. On donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2 \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} \end{array} \right.$$

Exercice 8: Charges discrètes (novembre 1998)

Deux charges électriques ponctuelles q et q' sont placées respectivement en A et B distants de d. Le champ électrique est nul en un point C entre A et B, tel que $AC = d/3$. Quelle relation y a-t-il entre ces deux charges, le potentiel est-il nul en C ?
Réponses : $q' = 4q$, $V_C = \frac{9q}{4\pi\varepsilon_0 d}$.

Exercice 9: Relation entre champ et potentiel

Dans les exemples qui suivent, on donnera soit le potentiel, soit le champ électrique et on demande d'en déduire inversement le champ ou le potentiel.

• On considère un cercle de rayon r_0 portant une charge totale Q répartie uniformément sur le périmètre de l'anneau. Le potentiel en un point de l'axe distant de $z > 0$ du centre du cercle vaut

$$V_{\text{cercle}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z}(1 + r_0^2/z^2)^{-1/2}.$$

Quel est son comportement à grande distance ? Déterminer le champ électrique associé en tout point de l'axe.

• On considère une sphère de rayon r_0 portant une charge totale Q uniformément répartie dans le volume de la sphère. On choisit les coordonnées sphériques. Utiliser des arguments de symétrie pour donner la forme attendue du potentiel et du champ en tout point. Que doit-on obtenir à grande distance ? On montre que le champ est de la forme

$$E_<(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}, \text{ si } r < r_0,$$
$$E_>(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \text{ si } r > r_0.$$

Tracer $E(r)$ et déterminer le potentiel à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère, puis tracer $V(r)$.

• On considère un fil rectiligne infini de diamètre négligeable, portant une charge uniformément répartie de densité linéique λ. En coordonnées cylindriques, de quelles variables dépend le champ électrique et quelle sont sa direction et son sens ? Peut-on donner a priori le comportement asymptotique à grande distance ? L'expression exacte du champ est la suivante

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

En déduire l'expression du potentiel en imposant la condition $V(r = a) = V_0$. Tracer l'allure de $E(r)$ et $V(r)$.

Exercice 10: Demi-cercle chargé (novembre 1998)

On considère un demi-cercle de rayon R, de centre O portant une charge Q uniformément répartie. Calculer le potentiel et le champ en O.
Réponses : $V_O = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, $E_O = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$.

Exercice 11: Cercle chargé

On considère un fil circulaire portant une charge Q uniformément répartie sur son périmètre.

• Calculer le potentiel électrostatique en un point quelconque de l'axe du cercle à la distance z de son centre. En déduire le champ électrique associé.

• On demande maintenant la démarche inverse : calculer le champ électrique en un point quelconque de l'axe du cercle à la distance z de son centre. En déduire le potentiel électrostatique associé.

Exercice 12: Molécule de dioxyde de carbone (novembre 1999)

La molécule CO_2 est linéaire, elle est constituée de deux atomes d'oxygène disposés de part et d'autre à la distance d d'un atome de carbone central. Dans la liaison chinmique, chaque atome d'oxygène récupère une fraction $(-q)$ de charge électronique de l'atome de carbone, lequel est alors porteur d'une charge $+2q$.

1) *En supposant les charges ponctuelles, donner l'expression de la force électrostatique exercée sur l'un des atomes d'oxygène par le reste de la molécule.*

2) *Donner l'expression littérale U_{es} de l'énergie électrostatique* **totale** *de la molécule. En considérant que la valeur de la charge transférée vaut $q = q_e/4$, où q_e est la charge de l'électron, calculer U_{es} sachant que $d = 1.2$ Å.*

3) *Tracer l'allure de U_{es} en fonction de d. Existe-t-il une autre forme d'énergie pour expliquer la stabilité de la molécule ?*

Réponses : $F = \frac{7}{4}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$. $U_{es} = -\frac{7}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \simeq 2.6\ eV$. Il existe une énergie répulsive (positive) de sorte que l'énergie totale présente un minimum stable à $d = 1.2$ Å.

Exercice 13: Noyaux isobares

Les effets électrostatiques dans les noyaux apportent des corrections aux termes dominants dus à l'interaction forte. Considérons des noyaux isobares, c'est-à-dire qui comportent un même nombre de nucléons, mais des répartition différentes entre protons et neutrons. C'est le cas de ${}^{11}_{5}$B et ${}^{11}_{6}$C, le carbone 11 ayant un proton supplémentaire. On constate expérimentalement que les niveaux d'énergie de ces deux noyaux sont très voisins, mais que ceux du carbone 11 sont décalés de +1.982 MeV par rapport à ceux du bore 11.

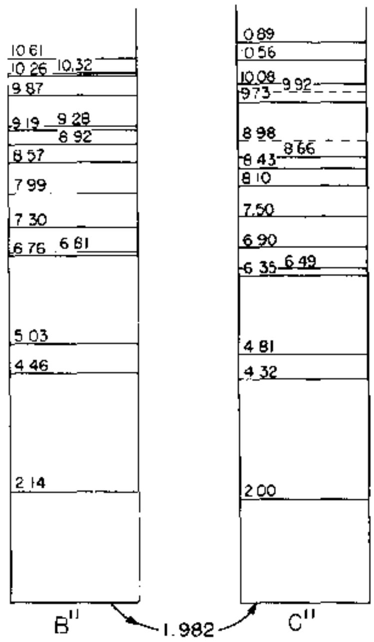


Fig. 8–7. The energy levels of B^{11} and C^{11} (energies in Mev). The ground state of C^{11} is 1.982 Mev higher than that of B^{11}.

Pour interpréter cette différence d'énergie, on tient compte de la différence d'énergie de masse entre proton et neutron, et de la différence d'énergie électrostatique entre un noyau à 6 protons et un noyau à 5 protons :

$$E_0({}^{11}_{6}\text{C}) - E_0({}^{11}_{5}\text{B}) = m_p c^2 - m_n c^2 + U_{\text{es}} = 1.982 \text{ MeV},$$

où $m_n c^2 - m_p c^2 = 1.3$ MeV et $U_{\text{es}} = U(Z=6) - U(Z=5)$ est la différence d'énergie électrostatique entre les deux noyaux.

1) Justifier que l'énergie électrostatique d'un système à Z protons est de la forme

$$U(Z) = \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \simeq \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 \langle r\rangle} N_\ell,$$

où $\langle r\rangle$ est la distance moyenne entre protons et $N_\ell = \frac{1}{2}Z(Z-1)$ est le nombre de liaisons entre les Z protons. La valeur de $\langle r\rangle$ est liée à R la taille moyenne du noyau, $R = r_0 A^{1/3}$, A étant le nombre de nucléons et $r_0 = 1.2 \times 10^{-15}$ m. On a en effet

$$\langle r \rangle = \int_0^R r\rho(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

pour une distribution $\rho(r)$ des protons dans le noyau, et dans le cas d'une distribution uniforme en volume, $\rho(r) = (4\pi R^3/3)^{-1}$. On en déduit que (le facteur numérique précis dépend de la distribution réelle des protons dans le noyau)

$$U(Z) \simeq \frac{Z(Z-1)q_e^2}{2 \times 4\pi\varepsilon_0 R}.$$

2) Calculer U_{es} en MeV et comparer aux données expérimentales.

Exercice 14: Extensivité de l'énergie électrostatique (novembre 1998)

On désire savoir si l'énergie est une grandeur extensive, c'est-à-dire si elle varie proportionnellement au nombre de charges présentes dans un système ou proportionnellement à la dimension de ce système. Dans ce but on considère deux systèmes globalement neutres : l'un, S_1, constitué de deux charges q et $-q$ distantes de a et l'autre, S_2, constitué de quatre charges alignées dans cet ordre q, $-q$, q et $-q$ équidistantes de a également. Calculer l'énergie électrostatique U_1 de S_1 . puis U_2 de S_2 et conclure.

Réponses : $U_1 = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$, $U_2 = -\frac{7}{3}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Le nombre de charges dans le système a été multiplié par 2, la longueur par 3 et $U_2/U_1 = 7/3$, l'énergie électrostatique est donc non extensive.

Exercice 15: Linéarisation d'une fonction, développements limités, application au dipôle électrostatique

Soit $f(x)$ une fonction infiniment dérivable. Supposons connues sa valeur et celles de ses dérivées en un point x_0. On cherche à estimer $f(x)$ par une fonction approchée $f_{\mathrm{app}}(x)$ en un point voisin de x_0, c'est-à-dire tel que $x - x_0 = \epsilon$, $|\epsilon| \ll 1$.

• Pour cela on tracera une fonction $f(x)$, on exprimera sa pente en x_0 et on calculera la valeur prise par la tangente en x_0 au point x. On notera $f_{\mathrm{app}}(x)$ cette valeur.

• Exemples : soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$. Calculer les valeurs de f et g en $x = 1.1$ et en 1.01 et comparer aux valeurs approchées $f_{\mathrm{app}}(1.1)$ et $g_{\mathrm{app}}(1.1)$ (puis $f_{\mathrm{app}}(1.01)$ et $g_{\mathrm{app}}(1.01)$). Calculer l'erreur relative et commenter.

• En mathématiques, on démontre le développement de Taylor qui devient **exact** dans la limite d'un nombre infini de termes :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{1!}(x-x_0)f^{(1)}(x_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0)^2 f^{(2)}(x_0) + \ldots \\ &+ \ldots + \frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

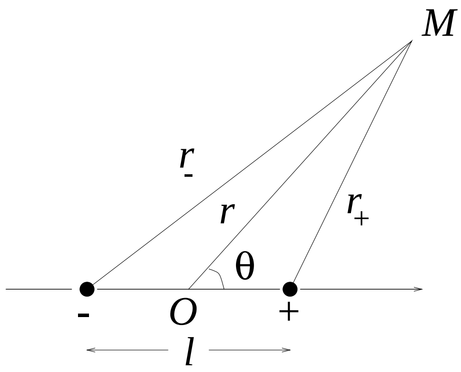
où $f^{(n)}(x)$ est la dérivée n-ième de $f(x)$. On remarque que le développement n'est licite que dans un domaine où la fonction ne présente pas de singularité.

Dans la plupart des applications en physique, on peut se limiter à des développements du premier ordre (linéarisation) ou du second ordre. Calculer $f_{\mathrm{app}}(1.1)$ et $g_{\mathrm{app}}(1.1)$ jusqu'au second ordre ainsi que les erreurs correspondantes.

• Application au dipôle électrostatique : deux charges $+q$ et $-q$ distantes de ℓ créent en un point M distant de r de l'origine (prise au milieu des charges) un potentiel électrostatique

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

où r_+ et r_- sont indiqués sur le schéma. Exprimer r_+ et r_- en fonction de r, ℓ et θ.



Si $\ell \ll r$ (ce qui est le cas pour les applications en physique où les dipôles électrostatiques se rencontrent par exemple lorsque des liaisons chimiques sont polarisées), développer $1/r_+$ et $1/r_-$ au premier ordre en ℓ/r. En déduire le potentiel à grande distance dans cette approximation.

• La quantité $p = q\ell$ est appelée moment dipolaire. Calculer la valeur typique du moment dipolaire d'une molécule.

• Les composantes du champ électrique en coordonnées polaires s'écrivent :

$$E_r(r,\theta) = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Exprimer ces composantes.

• Exprimer le potentiel puis le champ électrique en coordonnées cartésiennes.

• Déterminer l'équation des surfaces équipotentielles puis celle des lignes de champ. Représenter ces allures.

Exercice 16: Raisonnement qualitatif (mars 2003)

• *Quel est l'ordre de grandeur du moment dipolaire $|\vec{p}|$ d'une molécule ?*

• *On considère un dipôle élémentaire. On cherche le potentiel électrostatique qu'il crée à la distance r dans la direction θ (θ est repéré par rapport à l'axe du dipôle). On pose pour cela*

$$V(r,\theta) = (4\pi\varepsilon_0)^a |\vec{p}|^b r^c f(\theta)$$

où $f(\theta)$ est une fonction inconnue sans dimension. Déterminer les dimensions $[4\pi\varepsilon_0]$ et celles de $[V]$. En déduire les valeurs des exposants a, b et c. Pourquoi le potentiel décroît-il plus rapidement que $1/r$?

• *Exprimer les composantes du champ électrique sous la forme*

$$E_r(r,\theta) = \frac{2|\vec{p}|}{4\pi\varepsilon_0 r^3} f(\theta)$$

$$E_\theta(r,\theta) = -\frac{|\vec{p}|}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\frac{\mathrm{d}f(\theta)}{\mathrm{d}\theta}.$$

On suppose que $f(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta$. Expliquer pourquoi lorsque l'on se situe sur l'axe du dipôle la composante E_θ doit être nulle. En déduire qu'une des constantes A et B est nécessairement nulle.

Exercice 17: Segment chargé

On considère un segment de longueur $2a$ placé sur l'axe Oy (l'origine est au milieu du segment), et portant une charge $\lambda(y) = \lambda_0 \,\mathrm{sgn}\,(y)$.

• Calculer la charge totale Q portée par le segment.

• Calculer le champ électrique en un point M de l'axe Ox (on pourra utiliser les symétries pour déterminer l'orientation du champ). Déterminer le comportement asymptotique à grande distance.

• Montrer que l'on peut faire une analogie avec le dipôle électrique et expliquer pourquoi.

Exercice 18: Segment chargé (mars 2002)

On considère un segment de longueur $2a$ placé sur l'axe Oy (l'origine est au milieu du segment), et portant une charge $\lambda(y) = \lambda_0 \operatorname{sgn}(y)$.

- *Calculer la charge totale Q portée par le segment.*
- *Calculer le champ électrique en un point M de l'axe Ox (on pourra utiliser les symétries pour déterminer l'orientation du champ).*
- *Déterminer le comportement asymptotique du champ à grande distance.*
- *Montrer que l'on peut faire une analogie avec le dipôle électrique et expliquer pourquoi. On rappelle que le potentiel du dipôle électrostatique en coordonnées polaires est donné par*

$$V(r,\theta) = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

et que l'on peut facilement en déduire les composantes polaires du champ.

Exercice 19: Disque chargé, plan chargé

On considère une couronne circulaire uniformément chargée en surface, portant une densité surfacique constante σ, comprise entre deux cercles concentriques de rayons a et b.

- Exprimer la charge totale Q en fonction de σ, a et b.
- Calculer le champ électrique en un point quelconque de l'axe.
- Retrouver le résultat relatif au disque plein, chercher également la limite du plan infini. En quoi le champ dans ce dernier cas est-il remarquable ? Que vaut alors le potentiel ?
- Utiliser le théorème de superposition pour obtenir le champ sur l'axe d'une ouverture circulaire vide percée dans un plan infini chargé.

Exercice 20: Fil rectiligne infini chargé

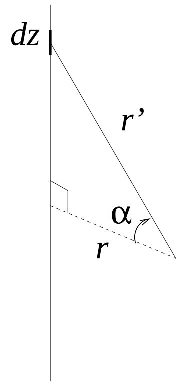
On considère un fil rectiligne infini de section négligeable, chargé uniformément avec une densité linéique λ.

- On se propose de calculer le champ et le potentiel en un point quelconque. Quelle est l'orientation du champ et de quelles variables dépendent le module du champ et le potentiel ?
- Donner la forme du potentiel créé par un élément de longueur du fil, montrer que la forme intégrale du potentiel conduit à une divergence. Cela signifie-t-il que le potentiel diverge effectivement ?
- Calculer le champ électrique, puis en déduire le potentiel réel.

Exercice 21: Fil rectiligne infini (mars 2003)

On considère un fil rectiligne infini, portant une densité de charge λ répartie uniformément sur sa longueur.

- *Utiliser les arguments de symétrie pour déterminer la direction du champ électrique et les coordonnées dont dépend son module.*
- *Calcul direct : on exprimera les intégrales pour le calcul de $E(r)$ ou de $V(r)$ en fonction l'angle α orienté représenté ci-dessous et de la distance r.*



– *Déterminer la valeur du module du champ électrique,*

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

par un calcul direct.

– *En déduire l'expression du potentiel électrostatique en imposant la condition $V(r=a)=0$ où a est une distance quelconque. Tracer l'allure de $E(r)$ et $V(r)$.*

– *Montrer que le calcul direct pour le potentiel conduit à des divergences. On donne*

$$\int \frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos\alpha} = \ln \mathrm{tg}\,\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

– *Discuter l'origine de ces divergences.*

- *Théorème de Gauss :*

Retrouver le résultat pour le champ électrique par application du théorème de Gauss.

Exercice 22: Le dipôle plan (septembre 2003)

1. *Un fil rectiligne infini porte une densité de charges constante λ par unité de longueur.*

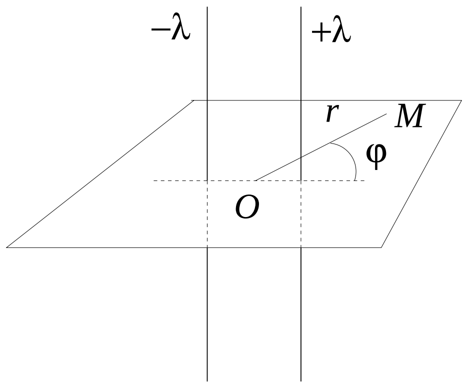
Calculer le champ électrique $\mathbf{E}_\lambda(\mathbf{r})$ (on repère la position $\mathbf{r}$ en coordonnées cylindriques (r,φ,z)) en un point quelconque de l'espace.

En déduire le potentiel électrostatique $V_\lambda(\mathbf{r})$.

2. *On considère maintenant deux fils rectilignes infinis parallèles, portant des densités uniformes de charges opposées $+\lambda$ et $-\lambda$ et distants de d. On appelle r_+ et r_- les distances d'un point d'observation M aux deux fils.*

Exprimer le potentiel électrostatique total $V_{2\ \mathrm{fils}}$ en fonction des distances r_+ et r_- (on choisira un potentiel nul dans le plan equidistant des deux fils).

On fixe l'origine des coordonnées entre les deux fils et à égale distance et on travaille dans un plan perpendiculaire à ces fils. La distance à l'origine est notée r et l'angle mesuré dans le plan par rapport au segment joignant les fils est noté φ. Exprimer les distances r_+ et r_- en fonction de r, d et φ.



Dans l'approximation de grande distance $r \gg d$ (approximation du dipôle plan), l'expression du potentiel prend une forme assez simple. En utilisant le développement limité au premier ordre $\ln(1+\epsilon)\simeq\epsilon$, *montrer que*

$$V(r,\varphi)=\frac{p\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Exprimer p. Vérifier les dimensions du potentiel.

En déduire les composantes du champ électrique $\mathbf{E}_{2\ \mathrm{fils}}(\mathbf{r})$. Comparer les résultats à ceux du dipôle ordinaire (que l'on rappelera) et donner une raison à la décroissance plus lente en fonction de r dans le problème du dipôle plan.

Exercice 23: Sphère chargée non uniformément en surface

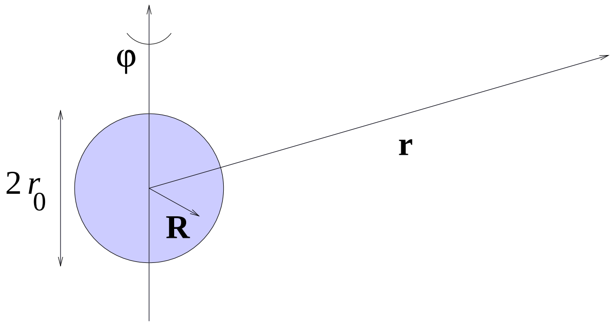
On considère une sphère portant une charge répartie en surface selon une dépendance angulaire $\sigma(\theta)=\sigma_0\cos\theta$ (σ_0 est une constante).

- Déterminer le potentiel en son centre. Peut-on déduire de l'expression du potentiel en ce point la valeur du champ ?
- Déterminer de manière directe la valeur du champ au centre de la sphère.

Exercice 24: Distributions de charges sphériques

• Champ et potentiel à l'extérieur d'une distribution sphérique : justifier les formes suivantes pour le potentiel et le champ créés par une distribution sphérique de rayon r_0 chargée uniformément en volume

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} f(r_0/r),$$
$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} g(r_0/r)\vec{u}_r.$$



Que doit-on attendre comme comportement des fonctions f et g à l'infini ? Utiliser le théorème de Gauss pour exprimer le champ en un point quelconque $r > r_0$. En déduire le potentiel et commenter les expressions. Qu'est-ce qui changerait si la charge était uniformément répartie à la surface de la sphère ?

• Dans le cas où la charge est répartie en volume, calculer le champ à l'intérieur de la sphère, puis le potentiel. Que valent les fonctions f et g pour $r < r_0$? Même question pour une charge de surface.

Exercice 25: Applications du théorème de Gauss en géométrie cylindrique

On considère un fil rectiligne infini de rayon r_0 portant une charge répartie uniformément en volume de densité ρ. Utiliser les arguments de symétrie et le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrique en tout point de l'espace. En déduire le potentiel obéissant à la condition arbitraire $V(r_0) = 0$.

Exercice 26: Potentiel et champ électrostatique créés par deux fils infinis

On considère deux fils infinis, rectilignes et parallèles, distants de d, et portant des densités linéaires de charges respectivement égales à $+\lambda$ et $-\lambda$.

Calculer le champ électrostatique et le potentiel en tout point de l'espace, dans la limite dipolaire où $d \ll r$. On parle de dipôle plan. Comparer avec le dipôle ordinaire.

Exercice 27: Atome d'hydrogène

L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est représenté par :

• le proton (constituant le noyau) assimilé à une charge ponctuelle $+|q_e|$ à l'origine O du repère (r, θ, φ), et produisant un potentiel purement coulombien $V_n(r)$,

• une densité de charge électronique $\rho_e(r) = Ce^{-2r/a_0}$, $a_0 = 0.529$ Å.

La constante C est déterminée en assurant la neutralité électrique (l'intégrale se calcule par intégration par parties [(1)]). Montrer que l'on obtient

$$-|q_e| = \int_0^\infty 4\pi r^2 \mathrm{d}r \rho_e(r) = \pi a_0^3 C.$$

Pour calculer le champ électrique créé par l'atome, on utilise le théorème de Gauss. La charge totale contenue à l'intérieur d'une sphère Σ de rayon r (centrée sur l'origine) vaut

$$Q_\Sigma = |q_e| + Q_e(r) = |q_e| + \int_0^r 4\pi r^2 \mathrm{d}r \rho_e(r)$$

---

(1) On obtient la fonction Γ d'Euler définie par $\Gamma(n+1) \equiv \int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = n\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = n\Gamma(n)$ avec $\Gamma(1) = 1$, soit $\Gamma(n+1) = n!$ si n est entier.

où $Q_e(r)$ est la contribution du nuage électronique et $|q_e|$ celle du noyau. Calculer Q_Σ [(2)].

Montrer que le flux du champ électrique[(3)] à travers Σ, $4\pi r^2 E(r)$, conduit, à l'aide du théorème de Gauss, à l'expression

$$E(r) = \frac{|q_e|}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_0 r} + \frac{1}{2r^2}\right) \mathrm{e}^{-2r/a_0}$$

Expliquer le résultat ibtenu dans la limite $r \to 0$. Le potentiel correspondant s'obtient par intégration[(4)]

$$V(r) = \frac{|q_e|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{r}\right) \mathrm{e}^{-2r/a_0}.$$

L'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène est déterminée en évaluant le travail nécessaire pour extraire du potentiel $V_n(r)$ créé par le noyau seul un électron de charge $-|q_e|$ et l'emmener de la distance $r = a_0$ à l'infini. Exprimer cette énergie de liaison et donner sa valeur numérique.

Exercice 28: Condensateur sphérique

On considère une sphère conductrice de rayon R_1 uniformément chargée en surface ($\sigma =$ constante).

- Comment sont les lignes de champ et les surfaces équipotentielles ? Quelles sont alors les surfaces de Gauss Σ telles qu'en tout point le champ électrostatique soit constant et leur soit perpendiculaire ?
- Appliquer le théorème de Gauss pour obtenir le champ $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ lorsque $r > R_1$ et $r < R_1$.
- En déduire le potentiel électrostatique $V(r)$ dans les deux régions de l'espace.
- Cette sphère est maintenant enfermée dans une seconde sphère conductrice, creuse, de rayon interne R_2, constituant la seconde armature d'un condensateur sphérique. Calculer la différence de potentiel entre les deux armatures en fonction de Q et en déduire la capacité C.
- On lâche sans vitesse initiale une charge q depuis l'armature interne du condensateur. Quel doit être le signe de q pour que celle-ci s'éloigne vers l'armature externe ? Quelle est alors la vitesse atteinte par la charge sur l'armature externe ?

Exercice 29: Géométrie sphérique et condensateur sphérique (juin 2002)

1.- *On considère une sphère conductrice de rayon R_1 uniformément chargée en surface ($\sigma =$ constante).*

- **1.a.-** *Comment sont les lignes de champ et les surfaces équipotentielles ? Quelles sont alors les surfaces de Gauss Σ telles qu'en tout point le champ électrostatique soit constant et leur soit perpendiculaire ?*
- **1.b.-** *Appliquer le théorème de Gauss pour obtenir le champ $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ lorsque $r > R_1$ et $r < R_1$.*
- **1.c.-** *En déduire le potentiel électrostatique $V(r)$ dans les deux régions de l'espace $r > R_1$ et $r < R_1$.*
- **1.d.-** *Tracer l'allure du champ et du potentiel en fonction de r.*

2.- *Cette sphère est maintenant enfermée dans une seconde sphère conductrice, creuse, de rayon interne R_2, constituant la seconde armature d'un condensateur sphérique (la surface externe de l'armature externe porte une charge $+Q$ pour assurer la neutralité électrique, mais n'intervient pas dans l'expression du champ entre les armatures).*

---

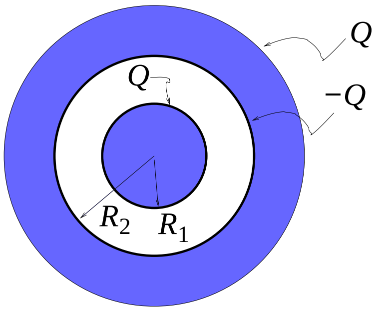
(2) On établit facilement par intégration par parties la relation

$$\Gamma_a(n+1) \equiv \int_0^a t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = [-t^n\mathrm{e}^{-t}]_0^a + n\int_0^a t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = n\Gamma_a(n) - a^n\mathrm{e}^{-a}$$

et $\Gamma_a(1) = 1 - \mathrm{e}^{-a}$.

(3) La distribution de charge est sphérique, le champ est donc radial, $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r$.

(4) On cherche pour cela une solution de la forme $(a + b/r)\mathrm{e}^{-2r/a_0}$.



2.a.- *L'expression du potentiel entre les deux armatures est-elle modifiée ?*

2.b.- *Calculer la différence de potentiel entre les deux armatures en fonction de Q et en déduire la capacité C du condensateur.*

2.c.- *Quelles sont les dimensions de C et celles de $V(R_1)-V(R_2)$? Former avec ces deux quantités une énergie.*

2.d.- *Tracer l'allure du champ et du potentiel en fonction de r, jusqu'au-delà de $r = R_2$ et même au-delà de la paroi externe de l'armature externe.*

Exercice 30: Plan chargé (juin 2003)

• Une charge q est placée dans un champ électrique $\vec{E}$. Quelle est l'expression de la force $\vec{F}$ qu'elle subit ? En utilisant cette relation, retrouver les dimensions $[E]$ du champ électrique en fonction de M, L, T et $Q = [q]$ la dimension de la charge électrique. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{U}_{q\to q'}$ d'une charge q' en présence de la charge q. En déduire les dimensions $[\varepsilon_0]$ de la constante ε_0.

• Un plan infini porte une densité de charges surfacique σ uniforme. Quelles sont les dimensions de σ ? Peut-on dire a priori quelle est la forme du champ électrique à grande distance, sinon, pourquoi ? On peut montrer que le champ ne dépend que de σ et ε_0. Chercher une solution de la forme $E = \text{const.} \times \sigma^\alpha \varepsilon_0^\beta$. Si σ est positif, à votre avis, quelle est la direction du champ à droite et à gauche du plan ? Faire un schéma. En quoi ce champ est-il remarquable et en particulier très différent du champ coulombien, et pourquoi ?

• Montrer, en utilisant le théorème de Gauss, que la constante dans l'expression précédente vaut $1/2$. Déterminer le potentiel électrostatique $V(x)$ en fonction de la distance x au plan. On imposera que le potentiel soit égal à V_0 sur le plan. Dessiner l'allure de $V(x)$ et commenter son comportement à grande distance.

Exercice 31: Condensateur plan

On étudie un condensateur plan pour lequel on néglige les effets de bords, c'est-à-dire que l'on suppose que les deux armatures planes, distantes de e, de surface S, chargées uniformément (densité σ), créent un champ électrique uniforme (comme des plans chargés infinis).

• *Rappeler l'expression du champ électrostatique $\vec{E}_1$ créé par l'armature chargée positivement. Représenter les champs E_1, E_2 dus aux deux armatures et appliquer le théorème de superposition pour en déduire le champ total E.*

• *Calculer le potentiel électrostatique $V(z)$ entre les armatures. Exprimer la différence de potentiel $V(0) - V(e)$ en fonction de la densité σ puis de la charge totale Q portée par une armature.*

• *En déduire la capacité C du condensateur. AN $S = 25cm^2$, $e = 1mm$, $\epsilon_0 = 1/(36\pi 10^9)$*

Exercice 32: Calcul de la capacité d'un condensateur sphérique par une méthode variationnelle (juin 2003)

On se propose ici de chercher quelle serait la valeur de la capacité d'un condensateur sphérique si l'on se donnait des formes hypothétiques de potentiel, mais qui respectent les conditions aux limites du problème.

On considère un condensateur constitué de deux armatures sphériques de rayons a et $2a$. L'armature interne est maintenue au potentiel V_0 et l'armature externe est reliée à la masse.

• *Donner l'expression du potentiel $V(r)$ entre les deux armatures. Tracer l'allure de la fonction $V(r)$. Calculer la capacité réduite $C/\pi\varepsilon_0 a$.*

• *On fait maintenant l'hypothèse (fausse) que le potentiel entre les armatures est donné par une fonction linéaire de la forme $V(r) = \alpha r + \beta$. Déterminer les constantes α et β pour satisfaire aux* *conditions aux limites en a et 2a. En déduire la forme du champ électrique associé,* $\mathbf{E}(r)$*, puis calculer l'énergie emmagasinée par le condensateur à l'aide de l'expression*

$$U_{(1)} = \frac{1}{2}\int_a^{2a} 4\pi\varepsilon_0 r^2 E^2(r)\mathrm{d}r$$

que l'on justifiera (élément et bornes d'intégration notamment). En déduire sa capacité $C_{(1)}$ *(on rappelle que* $U_{(1)} = \frac{1}{2}C_{(1)}V_0^2$*).*

- *On considère maintenant un potentiel d'essai plus général du type :*

$$V(r) = \alpha r^n + \beta$$

où n est un paramètre libre. Appliquer exactement la même démarche (calcul des constantes α et β puis du champ électrique associé) pour déterminer l'énergie électrostatique $U_{(n)}$*. Exprimer les capacités correspondantes sans dimension* ($C_{(n)}/\pi\varepsilon_0 a$) *dans les cas* $n = 1, -1, -2$*. Tracer le potentiel* $V(r)$ *dans les trois cas* $n = 1, -1, -2$*.*

- *On peut montrer que la fonction* $C_{(n)}/\pi\varepsilon_0 a$ *présente un minimum en* $n = -1$*. Qu'en pensez-vous ?*

Exercice 33: Conducteur sphérique dans un champ uniforme extérieur

On considère un conducteur sphérique de rayon r_0 relié à la masse et plongé dans un champ électrique extérieur uniforme $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_z$. Celui-ci a pour effet d'induire à la surface du conducteur une distribution surfacique inhomogène qui crée un potentiel et un champ $V_{\text{cond.}}$ et $\vec{E}_{\text{cond.}}$.

- Calculer le potentiel associé au champ uniforme en assurant la condition $V_0(0) = 0$, l'origine étant choisie au centre du conducteur sphérique. On exprimera $V_0(z)$ et $V_0(r,\theta)$ en coordonnées polaires.
- Quelle est la valeur du champ électrique total et du potentiel total à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre ?
- Quelles sont alors les conditions aux limites pour le potentiel total et pour le champ total lorsque $r \to \infty$, $r < r_0$, $r \to r_0^+$?
- On se propose de trouver l'expression du champ et du potentiel $V_{\text{cond.}}(r,\theta)$ et $\vec{E}_{\text{cond.}}(r,\theta)$ à l'aide du théorème de superposition. On admettra pour cela, sans démonstration, le théorème d'unicité qui stipule que lorsque l'on a trouvé une solution obéissant aux bonnes conditions aux limites dans un problème d'électrostatique, celle-ci étant unique, la solution trouvée est donc la bonne. Montrer que comme il faut avoir à la fois $V_{\text{cond.}} \to 0$ quand $r \to \infty$ et $V_{\text{cond.}}(r_0,\theta) = -V_0(r,\theta)$, le potentiel du dipôle électrostatique convient pour $V_{\text{cond.}}$ à condition d'imposer une valeur particulière au moment dipolaire (on dit que le dipôle est l'image électrique de la sphère). Donner cette valeur et vérifier les équations dimensionnelles.
- Exprimer alors le potentiel puis le champ en tout point de l'espace. Tracer l'allure des lignes de champ et des équipotentielles.
- Utiliser le théorème de Gauss pour exprimer le champ total en fonction de $\sigma(\theta)$ en un point infiniment voisin à l'extérieur de la surface du conducteur et en déduire la forme de la densité de charge surfacique induite $\sigma(\theta)$.

Exercice 34: Conducteur cylindrique dans un champ électrique extérieur (juin 2002)

On considère un cylindre de rayon a, de longueur infinie et d'axe Oz, parfaitement conducteur. Il est placé dans un champ électrique extérieur uniforme transverse, parallèle à l'axe Ox, $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_x$*. Le cylindre est maintenu à un potentiel nul. En vertu du théorème de superposition, le champ et le potentiel en tout point peuvent s'écrire comme la somme de deux contributions,*

$$\vec{E}_{tot.} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{cyl.}, \quad V_{tot.} = V_0 + V_{cyl.}.$$

1.- *Exprimer le potentiel électrostatique V_0 associé à $\vec{E}_0$, tout d'abord en coordonnées cartésiennes, $V_0(x)$, puis en coordonnées polaires, $V_0(r,\theta)$ (on repère l'angle θ depuis l'axe Ox de sorte que $x = r\cos\theta$). Décomposer également $\vec{E}_0$ sur les vecteurs polaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.*

2.- *On s'intéresse tout d'abord à l'intérieur du cylindre. Que se passe-t-il dans le conducteur dans les premiers instants après l'établissement du champ extérieur ? Que doit valoir le champ électrique total à l'intérieur une fois l'équilibre atteint ? Même question pour le potentiel.*

3.- *A l'extérieur le problème est plus délicat. En raison du caractère infini du cylindre, il est impossible d'assurer a priori que la contribution du cylindre, $V_{cyl.}(r,\theta)$, s'annule à l'infini.*

3.a.- *On peut en fait montrer qu'il est possible d'écrire le potentiel dû au cylindre sous la forme*

$$V_{cyl.}(r,\theta) = \text{const.} \times \frac{\cos\theta}{r}, \quad r > a.$$

Utiliser la condition de raccordement du potentiel en $r = a$ pour déterminer la valeur de la constante.

3.b.- *En déduire l'expression des composantes du champ électrique $\vec{E}_{cyl.}$ en coordonnées polaires pour $r > a$. On rappelle*

$$\mathbf{grad}\, f(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta.$$

3.c.- *Calculer les composantes de $\vec{E}_{tot.}$ lorsque $r \to a^+$. En déduire l'expression de la densité superficielle de charges*

$$\sigma(\theta) = \lim_{r\to a^+} \varepsilon_0(\vec{E}_{tot.} \cdot \vec{u}_r)$$

qui apparaît à la surface du conducteur.

Exercice 35: Diélectrique uniformément polarisé

On considère un diélectrique sphérique de rayon r_0 uniformément polarisé, $\vec{P} = P_0\vec{u}_z$. On rappelle que la polarisation se définit comme le moment dipolaire par unité de volume.

• Exprimer le potentiel du dipôle électrostatique, en déduire le potentiel créé par un élément de volume $d\tau$ de milieu polarisé.

• Montrer que la méthode du champ électrique auxiliaire peut s'appliquer à ce problème et calculer le potentiel en un point quelconque à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

• En déduire les composantes du champ. Identifier les caractéristiques du champ à l'intérieur et à l'extérieur.

• Calculer le champ électrique créé au centre d'une sphère par une distribution surfacique de charges de la forme $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$ et commenter le relation avec le problème de la sphère diélectrique.

Exercice 36: Théorème de Gauss et première équation de Maxwell

On considère un milieu dans lequel la densité de charges ne dépend que de la coordonnée x : $\rho(x)$.

• Montrer que le champ électrique $E(x)$ est obtenu par l'équation différentielle (première équation de Maxwell) :

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x)$$

On utilisera pour cela le théorème de Gauss appliqué à un cylindre élémentaire d'axe Ox fermé par deux surfaces identiques d'aire S, perpendiculaires à Ox et situées aux abscisses x et $x + dx$.

• Application au cas d'une distribution $\rho = \rho_0$ uniforme entre deux plans infinis perpendiculaires à Ox et distants de $2a$.

• Application à la charge d'espace dans un conducteur : la densité volumique de charge d'espace d'un conducteur chargé occupant le demi-espace $x < 0$ est de la forme :

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_0 \quad e^{x/a} & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Déterminer le champ et le potentiel électrostatiques en tout point de l'espace. On pose $a = 1$ Å. Calculer la profondeur δ à laquelle le champ est égal au $1/1000^{ème}$ de sa valeur en surface.

Exercice 37: Champ gravitationnel

• *Rappeler l'expression du potentiel* $V_m(r)$ *et du champ gravitationnel* $g_m(r)$ *créés par une masse ponctuelle* m *et comparer aux potentiel et champ coulombiens créés par une charge ponctuelle* q.

• *En déduire par analogie l'expression du théorème de Gauss pour le champ gravitationnel.*

• *Appliquer ce théorème à la détermination du champ puis du potentiel gravitationnels à l'extérieur du soleil (sans calcul compte-tenu des exercices antérieurs), puis à l'intérieur du soleil assimilé à une sphère de rayon* $R_\odot$ *de masse* $M_\odot$ *uniformément répartie.*

• *Rappeler la forme de l'énergie électrostatique d'une distribution de charge de densité volumique* $\rho(\vec{r})$. *En déduire l'expression de l'énergie gravitationnelle d'une distribution de masse de densité volumique* $\mu(\vec{r})$. *Calculer celle du soleil. Vérifier que les équations dimensionnelles sont satisfaites.*

Exercice 38: Conductivité électrique dans les métaux

La conductivité électrique dans les métaux est due à la présence d'électrons libres. Le cuivre libère à l'état métallique un électron par atome. On considère un fil de cuivre de section $S = 1\ mm^2$. La masse volumique du cuivre est $\rho = 8,9\ g.cm^{-3}$ et sa masse molaire $m_{\mathrm{Cu}} = 63,6\ g.mol^{-1}$. On rappelle que le nombre d'Avogadro vaut $\mathcal{N} = 6,02.10^{23}\ at.mol^{-1}$.

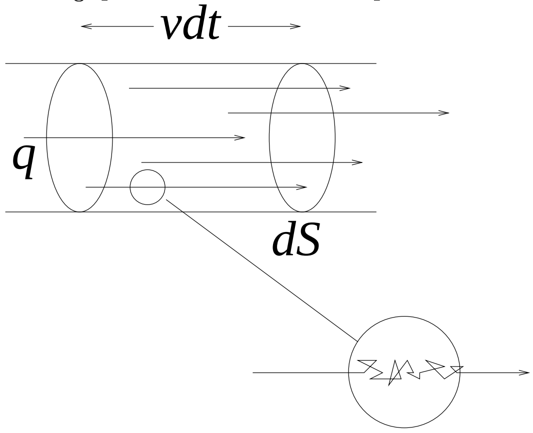
• Calculer la densité électronique dans le fil.

• Le fil étant parcouru par un courant électrique $I = 10\ A$, calculer la densité de courant i et la vitesse des électrons.

• On crée une différence de potentiel aux extrémités du fil et donc un champ électrique uniforme E dans le métal. Les électrons sont soumis à l'action de ce champ électrique et à celle d'une force de frottement visqueux de la forme

$$\vec{F}_f = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$$

qui rend compte en moyenne des collisions entre les électrons et les impuretés ou les défauts d'empilement du cuivre (modèle de Drude, 1900). τ est le temps moyen s'écoulant entre deux chocs. Le frottement décrit phénoménologiquement les collisions représentées sur la figure ci-dessous.



Établir la loi de variation de la vitesse des électrons en fonction du temps sachant que leur vitesse est nulle à l'instant $t = 0$.

- Calculer la vitesse des électrons à l'équilibre.

- Calculer la densité de courant dans le fil et en déduire la conductivité électrique du cuivre (Application numérique : $\tau = 4,22.10^{-15}\ s$, $m_e = 9.109.10^{-31}\ kg$).

- Calculer la résistance d'un mètre de fil de cuivre de section $1\ mm^2$.